Aufgabe C1 Landesabitur Hessen 2011 GK

Aufgabe 1 (11 BE)

Eine Bernoullikette liegt vor, wenn ein Zufallsversuch, bei dem man zwei verschiedene Ausgänge („Treffer“ und „Nichttreffer“) erhalten kann, unter gleich bleibenden Bedingungen, *p(T) = p*, also unabhängig voneinander, mehrere Male (*n*) wiederholt werden kann.

Diese drei Bedingungen sind bei der Toto-Wette erfüllt:

1) Jedes der 13 Spiele entspricht einem Zufallsversuch mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von p = 1/3

2) die Anzahl der Versuche ist n = 13 und

3) man kann nur richtig oder falsch tippen

X zählt die Anzahl der richtigen Tipps, d.h. $0 \le X \le 13$

$$p(X = 13) = \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \approx 6{,}27 \cdot 10^{-7}$$

$$\begin{aligned} p(\text{Gewinn}) &= p(X \ge 10) \\ &= 1 - p(X \le 9) \\ &= 1 - F\left(13; \frac{1}{3}; 9\right) \\ &= 1 - 0{,}9984 \quad (\text{nach Tabelle}) \\ &= 0{,}0016 \quad (= 0{,}16\,\%) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (7 BE)

X zählt wieder die Anzahl der richtigen Tipps, d.h. $0 \le X \le 13$,
die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt jetzt *p* = 0,45
n = 13

$$\begin{aligned} p(X=10) &= \binom{13}{10} \cdot 0,45^{10} \cdot 0,55^{3} \\ &\approx 0,016202... \\ &\approx 1,62\,\% \end{aligned}$$

$$p(\text{Spieler gewinnt}) = p(X \ge 10)$$
$$= \binom{13}{10} \cdot 0,45^{10} \cdot 0,55^{3} + \binom{13}{11} \cdot 0,45^{11} \cdot 0,55^{2} + \binom{13}{12} \cdot 0,45^{12} \cdot 0,55^{1} + \binom{13}{13} \cdot 0,45^{13}$$

Ausrechnen des Rechenterms war nicht gefordert.

Aufgabe 3.1 (4 BE)

Die nebenstehende Tabelle gibt eine Übersicht über die Gewinne der 42. Ausspielung. Die beiden fehlenden Beträge sind zu berechnen. Der Gesamtspieleinsatz betrug 635 399, 00 Euro. Er wird zu 50 % auf die Gewinner verteilt und ausgeschüttet.

Gewinn-Klasse Nr.	Anzahl der Gewinner	Beträge
1	114	……€
2	1.732	……€
3	12.727	6,20 €
4	53.143	1,40 €

$$\begin{aligned} \text{Gewinnausschüttung} &= 0,5 \cdot 635\,399\,€ \\ &= 317\,699,50\,€ \end{aligned}$$

davon werden je 25 % auf die einzelnen Gewinnklassen verteilt, d.h.

$$\text{Ausschüttung pro Gewinnkklasse} = 0,25 \cdot 317\,699,50\,€$$
$$= 79\,424,875\,€$$

Aus der Tabelle kann man entnehmen:

$$\text{Gewinnbetrag in der Gewinnklasse 2} = 79\,424,875 : 1732$$
$$\approx 45,8753\ €$$
$$\approx 45,80\ €$$

da der Gewinnbetrag des Einzelnen auf volle zehn Cent abgerundet wird.

$$\text{Gewinnbetrag in der Gewinnklasse 1} = 79\,424,875 : 114$$
$$\approx 696,7094\ €$$
$$\approx 696,70\ €$$

Aufgabe 3.2 (8 BE)

Berechnung der abgegebenen Tippreihen:

$$\text{Anzahl der Tippreihen} = \frac{\text{Gesamtspieleinsatz (in Euro)}}{\text{Preis pro Tippreihe (in Euro)}}$$
$$= \frac{635\,399}{0,5}$$
$$= 1\,270\,798$$

Laut Tabelle gab es in der 42. Ausspielung insgesamt 67 716 Gewinner in den 4 Gewinnklassen. Die mit der theoretischen Trefferwahrscheinlichkeit von p = 0,45 errechnete Gewinnwahrscheinlichkeit von mindestens 10 Treffern liegt ungefähr bei 2 %. Dies ist das Ergebnis des Rechenterms von Teilaufgabe 2.

Bei 1 270 798 Spielen ergibt sich mit der Formel für den Erwartungswert bei Binomialverteilungen

$$E(X) = n \cdot p = 1\,270\,798 \cdot 0,02 \approx 25416$$

d.h. dass rund 25 416 Spieler mit einem Gewinn rechnen könnten.

Da es aber deutlich mehr Gewinner gab, kann man unter Umständen davon ausgehen, dass der Sachverstand der Mitspieler höher als die geschätzte Trefferwahrscheinlichkeit von 45 % sein muss.
Was wäre also zu rechnen?

Es ist ein *p* so zu finden, dass das Ergebnis von

$$p(\text{Spieler gewinnt}) = p(X \geq 10)$$
$$= \binom{13}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^3 + \binom{13}{11} \cdot p^{11} \cdot (1-p)^2 + \binom{13}{12} \cdot p^{12} \cdot (1-p)^1 + \binom{13}{13} \cdot p^{13}$$

dem Quotienten $\frac{67\,716}{1\,270\,798} \approx 0{,}05329$ entspricht.

Der mitgelieferten Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung kann man für *p* den ungefähren Wert 0,5 entnehmen, denn

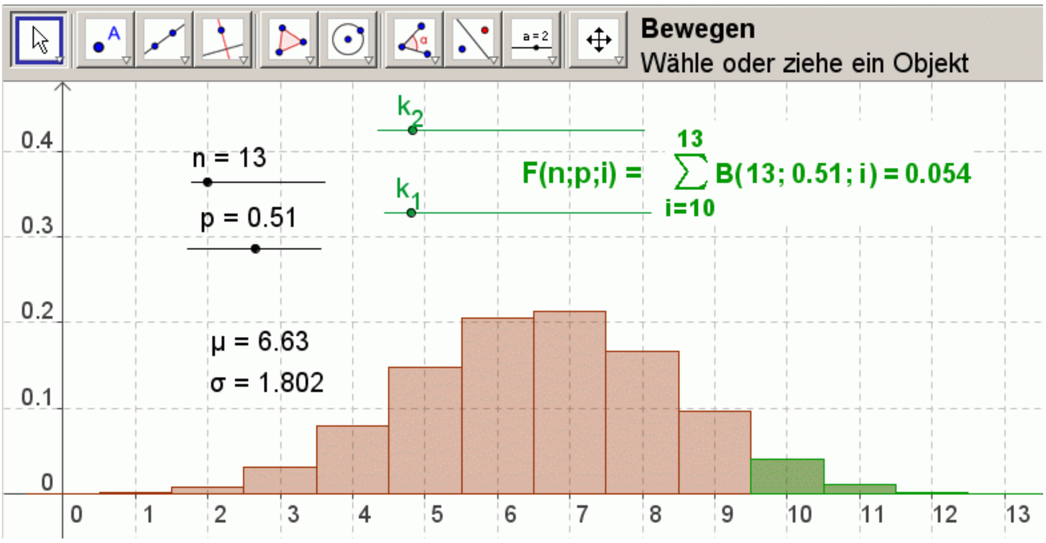
$$1 - F(13; p; 9) = 0{,}05329$$
$$F(13; p; 9) = 0{,}9461$$

$$F(13; 0{,}5; 9) = 0{,}9539$$

liegt am nächsten an dem gesuchten Wert.

Interpretation:
Können die beteiligten Spieler mit rund 50% Erfolgswahrscheinlichkeit den Ausgang eines Spiels richtig vorhersagen, so kann man bei rund 1,25 Millionen Tippreihen mit ca. 25 000 Gewinnen rechnen.

Ein genaueres Ergebnis erhält man, wenn man eine GeoGebra-Datei zur Binomialverteilung benutzt. (siehe Zeichnung)



Hier kann man für *p* den Wert 0,51 ablesen.